Instituto Politécnico Nacional

Escuela Superior de Cómputo

Convergencia absoluta y series alternantes

Unidad de aprendizaje: Cálculo aplicado

Grupo: 1CM6

Autores:
Morales López Laura Andrea
Ontiveros Salazar Alan Enrique

Profesora:
Dorantes Villa Claudia Jisela

24 de abril de 2017

Convergencia absoluta y series alternantes

1CM6
ESCOM-IPN

24 de abril de 2017

1. Series alternantes

Definición 1.1. Sea $\{a_n\}$ una sucesión. Decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es *alternante* si $a_n = (-1)^n b_n$ o $a_n = (-1)^{n+1} b_n$ donde $b_n \geq 0$. Entonces, vemos que los términos de la serie estarán alternados en su signo, ya sea que comiencen con el primer término positivo o negativo.

Teorema 1.2 (Criterio de series alternantes). Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie alternante, donde $a_n = (-1)^n b_n$ o $a_n = (-1)^{n+1} b_n$ y $b_n \geq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Si:

I) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, y

II) $\{b_n\}$ es una sucesión decreciente, es decir, $b_n \geq b_{n+1}$ para n suficientemente grande,

entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Demostración. Como $\{b_n\}$ es decreciente, entonces:

$$b_n - b_{n+1} \geq 0 \tag{1}$$

Sin pérdida de generalidad asumamos que $a_n = (-1)^{n+1} b_n$. Ahora, veamos cómo se comportan las sumas parciales pares:

$$S_{2k} = \sum_{n=1}^{2k} (-1)^{n+1} b_n = \sum_{n=1}^{2k-2} (-1)^{n+1} b_n + b_{2k-1} - b_{2k} = S_{2k-2} + b_{2k-1} - b_{2k} \tag{2}$$

Como $b_{2k-1} - b_{2k} \geq 0$, entonces $S_{2k} \geq S_{2k-2}$. Por lo tanto, la sucesión de las sumas parciales pares, es decir, $\{S_{2k}\}$, es creciente. Pero también, podemos escribir S_{2k} como:

$$S_{2k} = \sum_{n=1}^{2k} (-1)^{n+1} b_n = b_1 - \sum_{n=1}^{k-1} (b_{2n} - b_{2n+1}) - b_{2k} \tag{3}$$

Como $b_{2n} - b_{2n+1} \geq 0$ y $b_{2k} \geq 0$, entonces $S_{2k} \leq b_1$ para toda $k \in \mathbb{N}$. También, como $\{S_{2k}\}$ es creciente y acabamos de ver que está acotada por arriba, entonces $\{S_{2k}\}$ converge. Supongamos que converge a L, es decir:

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k} = L \tag{4}$$

Ahora, determinemos el límite de la sucesión de las sumas parciales impares, es decir, de $\{S_{2k-1}\}$:

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} (S_{2k} - b_{2k-1}) = \lim_{k\to\infty} S_{2k} - \lim_{k\to\infty} b_{2k-1} = L - 0 = L \tag{5}$$

Así, $\{S_{2k-1}\}$ también converge. Finalmente, como ambas convergen al mismo límite L, la sucesión $\{S_k\}$ debe converger también a L, por lo tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. □

Una observación es que este criterio solo sirve para demostrar convergencia, es decir, si alguna de las dos condiciones no se cumple sobre la serie alternante, no podemos concluir nada y será necesario usar otro criterio.

2. Convergencia absoluta

Definición 2.1. Sea $\{a_n\}$ una sucesión:

- Decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es *absolutamente convergente* si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.
- Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge pero la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge, decimos que la serie es *condicionalmente convergente.*

Teorema 2.2. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente, entonces también es convergente.

Demostración. Supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente, es decir, supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge. Vemos que $|a_n|$ puede ser a_n o $-a_n$ dependiendo de su signo, así, tenemos la siguiente desigualdad:

$$0 \leq a_n + |a_n| \leq 2\,|a_n| \tag{6}$$

Ahora, como $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} 2\,|a_n|$ también converge, ya que solo estamos multiplicando por 2 la serie. Sin embargo, usando la desigualdad (**??**) y el criterio de comparación directa, vemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|)$ converge. Finalmente, tenemos que la serie original es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n| - |a_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tag{7}$$

Ya que logramos expresarla como la diferencia de dos series convergentes, concluimos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. □

El teorema anterior es muy útil, ya que garantiza que una serie absolutamente convergente es convergente. Sin embargo, su recíproco no es necesariamente cierto: las series que son convergentes pueden o no ser absolutamente convergentes. El ejemplo más famoso es la serie cuyo n-ésimo término es $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$, ya que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge por el teorema anterior, pero $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ diverge por el criterio de las series p.

3. Explicación

3.1. ¿Series Alternantes?

Si tu como yo no entendiste que decía antes. No te preocupes para eso estamos aquí.

Tenemos entonces una sucesión, la cual denotaremos a_n

Donde $_n$ es el numero del termino (como en un Array :))

Estas series tienen esta forma:

$-a_1 + a_2 - a_3 + a_4...$

ó

$+a_1 - a_2 + a_3 - a_4...$

O sea, alternan el signo...(No te esperabas eso). Entonces las podemos escribir como una serie infinita donde n va desde 1 hasta ∞.

Esta empieza con negativo $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$

ó

Esta empieza con positivo. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} b_n$

Arriba nos dice que $b_n \geq 0$, eso sirve para que el -1 tenga el poder de elegir el signo.

Y como todos sabemos cuando n es par no cambia de signo y cuando es impar si cambia, y esa es la magia de estas series.

3.1.1. ¿Convergen?

Para nuestra fortuna alguien más ya estudió esto y nos dijo que convergen si se cumplen 2 cosas.

Advertencia: No usen estas reglas para probar divergencia. Solo se aplican para probar convergencia

Pasos para probar convergencia

- Paso 1:¿Recuerdan ese b_n? Apliquen limite.

  $\lim_{n\to\infty} b_n$

  Si el limite es cero procedan al siguiente paso, si no break;

- Paso 2: b_n es decreciente. Osea

  $b_n - b_{n+1} \geq 0$

  ¿Terminaste el proceso? Es convergente.

3.2. Ejemplos 1

Ejemplo 3.1. Una sencilla para encaminarnos:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

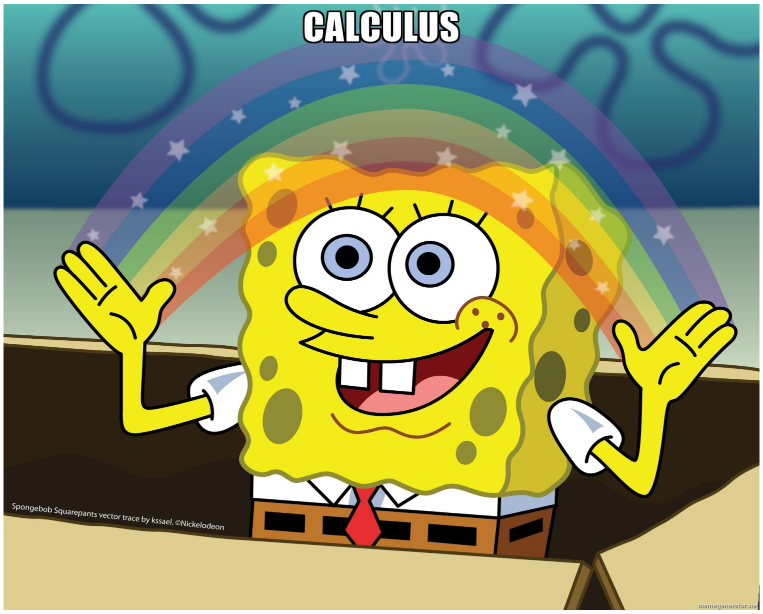
- Paso 1: Limite

  $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

- Paso 2: ¿Es Decreciente?

  ¿$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \geq 0$?

  Como es verdadero entonces esta suma es convergente.



Ejemplo 3.2. Una más

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+2}{n+1}$$

- Paso 1: Limite
  $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = 1$
  Recuerda que como el limite es distinto de 0 ya no converge.
  Break;
  Continua solo por gusto :)
- Paso 2: ¿Es Decreciente?
  $¿\frac{n+2}{n+1} - \frac{(n+1)+2}{(n+1)+1} \geq 0?$
  $\frac{n+2}{n+1} \geq \frac{n+3}{n+2}$
  $(n+2)(n+1) \geq (n+3)(n+1)$
  $n^2 + 4n + 4 \geq n^2 + 4n + 3$
  $4 - 3 \geq 0$
  Es verdadero pero como el primer criterio no se cumplió, no podemos concluir nada.

3.3. ¿Convergencia Absoluta?

Resulta que nuestra serie tiene un gemelo, y no sabemos si es malvado o no. Para saber si es malvado tomamos nuestra serie y le colocamos un **valor absoluto.** Es bueno si converge. Es malvado si la serie no converge.

Malvado= Converge condicionalmente

Bueno= Converge absolutamente

¿Cómo determinar si el gemelo es malvado?

- Paso 1: ¿La serie converge? Si no es cierto break;
- Paso 2: Agrega el valor absoluto Y ve si converge. Si converge es Bueno Si no llegas a acabar es malvado.

3.4. Ejemplos 2

Ejemplo 3.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

- Paso 1: Convergencia en la serie.
  La serie converge como vimos arriba.
- Paso 2: Aplicamos el valor absoluto
  $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right|$
  $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$
  Malvada
  Esta suma diverge por el criterio de las series p, por lo cual la serie converge condicionalmente.

Ejemplo 3.4. Otro

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-n^2}$$

- Paso 1: Esta vez saltemos al paso 2
- Paso 2: Aplicamos el valor absoluto

  $$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n e^{-n^2}\right|$$

  $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^{n^2}}$$

  Usando el criterio de comparación usamos la serie:

  $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} \text{ La cual converge}$$

  y comparando

  $$¿\ \frac{1}{e^{n^2}} < \frac{1}{2^n}?$$

  Buena

  Es verdadero entonces la serie original converge absolutamente.

Y me preguntarás ¿Por qué? El Teorema 2.2 dice que si la serie con el absoluto converge, entonces la serie original alternante converge también. Cool.

4. Ejercicios

Ejercicio 4.1. Sea $a_n = \dfrac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+4}$. Demuestra que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Ejercicio 4.2. Sea $a_n = \dfrac{\cos(\pi n)}{\sqrt{n}}$. Demuestra que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie alternante y que converge.

Ejercicio 4.3. Determina si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ es absolutamente convergente, condicionalmente convergente o divergente.

Ejercicio 4.4. Determina si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3}$ es absolutamente convergente, condicionalmente convergente o divergente.

Ejercicio 4.5. Demuestra que la serie $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \dfrac{1}{5\cdot 6} + \cdots = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n)}$ es alternante, converge y es condicionalmente convergente.

5. Soluciones

5.1. Problema 1

- Tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+4} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{(n+4)^2}} = 0$$

- También:

$$\begin{aligned} \frac{n}{n+4} &\geq \frac{\sqrt{n+1}}{n+5} \\ n(n+5)^2 &\geq (n+1)(n+4)^2 \\ n^3 + 10n^2 + 25n &\geq n^3 + 9n^2 + 24n + 16 \\ n^2 + n &\geq 16 \end{aligned}$$

  Eso quiere decir que la sucesión comenzará a decrecer desde $n \geq 4$, por lo que $\dfrac{n}{n+4} \geq \dfrac{\sqrt{n+1}}{n+5}$ se cumple.

Por lo tanto, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+4}$ converge.

5.2. Problema 2

Recordemos la identidad trigonométrica $\cos(\pi n) = (-1)^n$ para toda $n \in \mathbb{Z}$, entonces la serie es simplemente $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, donde se ve claramente que es alternante.

- Tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

- También:

$$\frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{(n+1)^2}$$
$$(n+1)^2 \geq n^2$$
$$2n+1 \geq 0$$

Debido a que $2n+1 \geq 0$ para toda $n \geq 1$, se cumple que $\frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{(n+1)^2}$.

Por lo tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{n^2}$ converge.

5.3. Problema 3

Tenemos que la serie formada por los valores absolutos de los términos es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, y por el criterio de las series p, converge. Por lo tanto, la serie original es **absolutamente convergente**.

5.4. Problema 4

Tenemos que la serie formada por los valores absolutos de los términos es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^3}$. También, sabemos que $|\sin n| \leq 1$, entonces $\frac{|\sin n|}{n^3} \leq \frac{1}{n^3}$. Sabemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ converge por el criterio de las series p, entonces, usando el criterio de comparación directa, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^3}$ también converge. Por lo tanto, la serie original es **absolutamente convergente**.

5.5. Problema 5

Notemos que $\frac{1}{(2n-1)(2n)} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$, por lo que la serie en realidad es $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, donde se ve claramente que es alternante. Y como vimos en los ejemplos 3.1 y 3.3, esta serie converge y es condicionalmente convergente.